Om valkretsstorlekars spärreffekter

Jesper Jerkert

jerkert@kth.se

Avd. för Filosofi, Institutionen för Filosofi och Historia

Kungl Tekniska Högskolan, Stockholm

2014-09-12

Abstract

On effective thresholds due to constituency size

In the absence of formal thresholds for representation, the constituency size will determine the effective threshold. In Swedish municipality elections there are (as of 2014) no formal thresholds, but the constituency sizes vary considerably. This note mainly presents the two mathematical formulas of interest for the calculation of effective thresholds. The voting share needed to get one seat under maximally charitable conditions (with respect to the distribution of votes among the other parties) is given by equation (7), where d is the first divisor (currently set to 1.4 in the Swedish system), M is the number of seats, and n is the number of parties. The voting share needed to be guaranteed to have one seat is given by equation (13). There is a threshold in between these extremes, a threshold at which there is a 50 % probability of winning one seat and a 50 % probability of winning none. For sufficiently large values of M, it is reasonable to believe that equation (5) provides a good approximation for the 50 % probability threshold.

Introduktion

Avsaknad av spärr vid parlamentsval har ibland framhållits som en bidragande orsak till partisplittring, och därmed till politisk instabilitet. De mest slående historiska exemplet avser partisplittringen i mellankrigstidens Tyskland, som uppstod under ett valsystem som garanterade representation i riksdagen även för mycket små partier (Hirdman, Lundberg & Björkman, 2012, s. 21). Partisplittringen anses vara en av många faktorer som bidrog till nazisternas framgångar. Det råder inget tvivel om att valsystemets utformning kan ha inverkan på demokratins funktion, även om det tyska exemplet naturligtvis är osedvanligt dramatiskt.

Idag tillämpas i Tyskland en spärr på 5 % till förbundsdagen (riksdagen). I Sverige används för närvarande spärrar på 4 % till riksdagen och 3 % till landstingsfullmäktige. Det finns dock inga spärrar i de svenska kommunalvalen, men där sätter valkretsarnas storlekar i praktiken upp spärrar för hur små partier som kan få representation. Eftersom kommunvalkretsarnas storlekar varierar, skiljer sig de praktiska spärrarna mellan olika kommuner, eller till och med mellan olika delar av samma kommun om det finns flera valkretsar vid kommunalvalen. Sådana spärrar, som uppkommer beroende på valkretsarnas storlekar, har ibland kallats ”naturliga spärrar” i litteraturen. Så kommer även jag att kalla dem. (På engelska kallas de ”effective thresholds”.)

Att de naturliga spärrarna varierar ganska mycket mellan kommunerna kan eventuellt uppfattas som orättvist. Utredningar har upprepade gånger påpekat detta. I den senaste offentliga utredningen, framlagd av 2011 års vallagskommitté, har man föreslagit att vallagen ska ändras så att de naturliga spärrarnas betydelse tonas ned. Man föreslår att fasta spärrar införs, nämligen 2 % i icke valkretsindelade kommuner och 3 % i valkretsindelade kommuner (SOU 2012:94). I skrivande stund (strax före valet 2014) är dock ännu inget beslutat om detta. Om ändringar genomförs kommer de sannolikt att gälla från och med de allmänna valen 2018. Jag återkommer till detta förslag senare.

I denna artikel ska jag reda ut hur naturliga spärrar uppkommer, och jag ska redovisa vilka matematiska formler som kan utnyttjas för att beräkna dem. För bara några år sedan fanns, såvitt jag vet, inga sådana formler offentligt publicerade, åtminstone inte på ställen där vanligt folk hade någon chans att finna dem. Situationen har nu förbättrats genom att matematikern Svante Janson tillgängliggjort ett omfattande kompendium om valmatematik (Janson, 2012*a*). Hans framställning är dock ganska kompakt, och jag tror att det kan finnas behov av en framställning med lite fler exempel, och med lite fler ord i förhållande till formlerna. Det är vad jag försöker åstadkomma i denna text.

Spridd förvirring

Vilka är valkretsstorlekarnas spärreffekter i kommunerna? Denna fråga borde vara intressant för envar som vill uttala sig om det nuvarande systemets förtjänster och brister, men frågan har oftast ignorerats i den svenska vallitteraturen. Till viss del kan det bero på att utredningar om valsystemet tenderat att vara inriktade på riksdagsvalen, och i dessa används ju spärr och utjämningsmandat, varför valkretsstorlekarnas naturliga spärreffekter varit av begränsat intresse.

När frågan ändå på sistone har behandlats i officiella sammanhang har resonemangen ofta blivit fel. I 2008 års Grundlagsutredning sägs följande:

> ”För de kommuner som inte är valkretsindelade innebär den nuvarande ordningen att man har ett kommunproportionellt system jämförbart med riksdagsvalet och landstingsvalet men utan någon särskild småpartispärr. Noteras ska dock att antalet mandat som står på spel i de icke valkretsindelade kommunerna är mellan 31 och 49, vilket i sig rymmer en spärr mot små partier på mellan 2,08 och 3,22 procent. När det sedan gäller de valkretsindelade kommunerna handlar det som regel om valkretsar på mellan 15 och 25 mandat, vilket ger en spärr mot små partier på mellan 4 och 6,66 procent.” (SOU 2008:125, s. 195)

Dessa uppgifter upprepades nästan ordagrant i oktober 2011 i regeringens direktiv till den parlamentariska kommitté som tillsattes för att göra en översyn av delar av valsystemet (Dir 2011:97, s. 5).[1] Utifrån de givna siffrorna kan man förstå att det bakomliggande

[1]Kommittén har sedermera kommit i mål genom att bl.a. låta publicera utredningen SOU 2012:94. Där är

tänkesättet är att varje mandat motsvarar en röstandel V av storleken

$$V = \frac{1}{M}, \tag{1}$$

där M är antalet mandat. För en kommun med 31 mandat får man då $V = \frac{1}{31} = 0{,}03226 = 3{,}226\,\%$, och med 49 mandat blir andelen $V = \frac{1}{49} = 0{,}02041 = 2{,}041\,\%$, siffror som ligger misstänkt nära de angivna. (Om Grundlagsutredningen och regeringen har tänkt i enlighet med (1) så har de dock gjort sig skyldiga till vissa slarv- och avrundningsfel.) Detta tänkesätt har förstås även figurerat i massmedia. I en artikel i *Dagens Nyheter* i september 2013 uppgav t.ex. chefen för valnämndens kansli i Stockholms stad att spärren som uppstår av valkretsindelning i kommuner ”brukar ligga mellan 4 och 6,6 procent av rösterna, i valkretsarna”, siffror som känns igen från 2008 års Grundlagsutredning (Tottmar, 2013).[2]

Valkretsstorlekarnas spärreffekter berördes också några år tidigare i betänkandet som lämnades av 2003 års vallagskommitté. Om kommuner som inte är indelade i valkretsar sägs här sålunda:

> ”Det ska dock framhållas att antalet mandat som står på spel i dessa kommuner är färre än 50, vilket i sig ger en naturlig småpartispärr på minst 2 procent och med tillämpning av den jämkade uddatalsmetoden i realiteten 2,8 procent” (SOU 2004:111, s. 164).

Vallagskommittén verkar ha tänkt på följande sätt. I en församling på färre än 50 mandat är varje mandat värt minst 1/50 av det totala antalet röster, det vill säga minst 2 % av rösterna. Jämkning med förstadivisorn 1,4 gör sedan att det krävs faktorn 1,4 gånger så många röster i realiteten, det vill säga minst 2,8 %. Om första divisorn betecknas d, så verkar 2003 års vallagskommitté således mena att den röstandel V som krävs för att ta minst ett mandat är

$$V = \frac{d}{M}. \tag{2}$$

Vilken av (1) och (2) är rätt? Svaret är dessvärre att båda är helt fel! Detta kan enklast visas genom att citera historiska fall där partier tagit plats i icke valkretsindelade kommuners fullmäktige trots röstandelar betydligt lägre än vad som borde krävas enligt (1) och (2). Två exempel kan räcka. I Kävlinge kommunalval 2010 fick Kristdemokraterna 1,476 % av rösterna, vilket räckte till ett mandat i fullmäktige (av totalt 49). Enligt (1) borde det ha krävts 2,041 % för att ta ett mandat, och enligt (2) borde det ha krävts 2,857 %. I Årjängs kommunalval 2010 fick Vänsterpartiet 1,696 % av rösterna och knep det sista mandatet (av 41). Enligt (1) borde det ha krävts 2,439 % och enligt (2) borde det ha krävts 3,415 % av rösterna för att ta ett mandat i en sådan församling. Det är förvånande att 2003 års vallagskommitté och 2008 års grundlagsutredning båda kommit med grovt felaktiga uppgifter om valkretsstorlekars spärreffekt, och det är beklagligt att dessa sedan givits ytterligare spridning genom bland andra 2011 års regeringsdirektiv.

Det finns en äldre källa som redovisar realistiska siffror, nämligen betänkandet av

---

resonemangen om naturliga spärrar korrekta – utom, förstås, i kommittédirektiven som enligt praxis återgivits som bilaga.

[2] Efter påpekande bland annat från författaren till föreliggande text togs uppgiften från valnämndens kanslichef bort i artikelns elektroniska version, men den finns i *Dagens Nyheters* tryckta upplaga.

kommunalvalskommittén 1971 (SOU 1971:4, s. 39). Där finns dock ingen redovisning av hur man kommit fram till siffrorna, och således heller inga formler för den som vill göra egna beräkningar. Formler finns numera publicerade i Janson (2012*a*, s. 94ff), men det verkar motiverat att lite noggrannare beskriva hur man kan komma fram till dem.

Ett grundläggande tankefel

Ett principiellt fel i tankegången bakom både (1) och (2) är tron att ett parti måste uppnå *minst* den andel av rösterna som motsvarar ett mandats andel av samtliga mandat. Så är det naturligtvis inte. Den uddatalsmetod som används i Sverige tillgodoser under de flesta omständigheter en god proportionalitet i mandatfördelningen. En god proportionalitet betyder i praktiken att vissa partier kan bli avrundade uppåt till ett helt antal mandat, andra kan bli avrundade nedåt. Om ett parti fått en röstandel som omräknat i mandat motsvarar 2,76 mandat, så förväntar vi oss att partiet får 3 mandat, då ju detta är det närmaste heltalet. Det är rimligt utifrån en proportionalitetsprincip. Enligt en princip om avrundning till närmaste heltal borde det i så fall räcka med en röstandel som motsvarar 0,5 mandat plus en röst för att få representation; det skulle avrundas till ett mandat.

Om detta är riktigt, och om man tar hänsyn till en eventuell jämkningsdivisor d som kan vara större än 1, så krävs bara hälften av den andel som vallagskommittén angivit, det vill säga

$$V = \frac{d}{2M}, \tag{3}$$

för att ha chansen att ta ett mandat, men ett parti som får en andel som är mindre än den som anges i (3) bör inte ha någon chans att få mandat.

Detta tänkesätt är dock inte hela sanningen. I Årjängs kommunalval 2010 fick som sagt Vänsterpartiet 1,696 % av rösterna och tog det sista av 41 mandat, men enligt (3) borde det ha krävts 1,707 % för att kunna ta ett mandat. För att finna rätt formler räcker det inte med att fundera över hur stor andel av rösterna som ett mandat motsvarar. Istället måste vi titta på hur mandatfördelning enligt den jämkade uddatalsmetoden faktiskt går till. För den som är helt obekant med jämkade uddatalsmetoden kan det vara lämpligt att först konsultera en grundläggande lärotext, till exempel Linusson (2008). Där diskuteras bland annat frågan om varför uddatalsmetoden alls ger god proportionalitet.

Beteckningar

Vi behöver införa ett antal beteckningar. Låt p_i beteckna ett parti, där heltalet i är ett index. Det finns totalt n partier, och de betecknas således $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Parti p_i har fått v_i röster. Detta röstetal svarar mot en viss röstandel V_i, nämligen röstetalet dividerat med det totala antalet röster: $V_i = v_i / \sum_i v_i$. (Varje avgiven röst antas tillfalla ett av partierna $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Blanka röster ignoreras således.) I valkretsen ska totalt M mandat fördelas. Varje parti p_i som deltar i mandatfördelningen har i varje skede av fördelningsproceduren ett jämförelsetal j_i, som definieras

$$j_i = \begin{cases} \dfrac{v_i}{d} & \text{om } m_i = 0, \\[2ex] \dfrac{v_i}{2m_i + 1} & \text{om } m_i \geq 1, \end{cases}$$

där m_i är antalet mandat som p_i dittills tilldelats. Med andra ord: om partiet ännu inte fått några mandat ($m_i = 0$), är jämförelsetalet lika med partiets röstetal dividerat med jämkningsdivisorn d. Om partiet fått minst ett mandat ($m_i \geq 1$), är jämförelsetalet lika med partiets röstetal dividerat med det udda talet $2m_i + 1$ (härav namnet ”uddatalsmetoden”). Varje mandat tilldelas det parti som har det högsta jämförelsetalet. Vid lika jämförelsetal tillgrips lottning.

Jämförelsetalet beräknas utifrån partiets röstetal, men man kunde lika gärna ha beräknat alla partiers jämförelsetal utifrån deras respektive röstandelar. Jämförelsetal beräknade utifrån röstandel kan vi kalla J_i, och definieras således

$$J_i = \begin{cases} \dfrac{V_i}{d} & \text{om } m_i = 0, \\[2ex] \dfrac{V_i}{2m_i + 1} & \text{om } m_i \geq 1. \end{cases} \tag{4}$$

Det gäller att $j_i = J_i \sum_i v_i$. Jämförelsetal baserade på röstetal respektive röstandelar är således proportionella mot varandra, och ger alltid precis samma mandatfördelning. Eftersom jag är intresserad av att beräkna vissa kritiska röstandelar, är det jämförelsetal baserade på röstandelar, J_i, som jag framledes kommer att beakta.

Fallet två partier

Det är enklast att börja med att betrakta fallet att det endast finns två partier ($n = 2$). Låt V vara det intressanta (mindre) partiets röstandel. Det andra (större) partiet har således fått röstandelen $1 - V$. Antag att det större partiet tar de första $M - 1$ mandaten. När det sista, M:te, mandatet ska delas ut antar vi att partierna får exakt samma jämförelsetal, så att det blir lottning. Vid vilken röstandel V för det mindre partiet inträffar detta? I enlighet med definitionen av J_i finner vi att det större partiets jämförelsetal i detta skede är $\frac{1-V}{2(M-1)+1} = \frac{1-V}{2M-1}$, medan det mindre partiets jämförelsetal är $\frac{V}{d}$. Om vi sätter dessa lika och löser ut V erhålls

$$V = \frac{d}{2M - 1 + d}. \tag{5}$$

Detta är således den kritiska röstandel vid vilken det blir lottning om det sista mandatet. Om det mindre partiet får högre röstandel än vad (5) anger, tillfaller mandatet med säkerhet det mindre partiet. Om det däremot får en lägre andel av rösterna, tar det större partiet med säkerhet även det sista mandatet. Ekvation (5) ger en något lägre röstandel än ekvation (3). Med exempelvis $M = 49$ och $d = 1{,}4$ ger (3) värdet $V = 1{,}429\,\%$, medan (5) ger $V = 1{,}423\,\%$.

Fler än två partier

Analysen för två partier förslår tyvärr inte i den svenska politiska verkligheten, där det i regel är betydligt fler än två partier som tävlar om mandaten. Notera till exempel att i fallet Årjängs kommunalval 2010 så säger formel (5) att det krävs $V = 1{,}699\,\%$ av rösterna för att få ett mandat, men Vänsterpartiet tog de facto ett mandat med endast $1{,}696\,\%$ av rösterna. Formel (5) är inte helt korrekt om det finns fler än två partier, även om den kan fungera som en god approximation (som vi ska se längre fram).

Man kan inse att då antalet partier är tre eller flera, kan det inte finnas någon fixerad röstandel som utgör en gräns mellan att alltid få mandat och att aldrig få mandat. Betrakta ett hypotetiskt exempel där p_1, p_2 och p_3 är de tre partier som fått röster i valkretsen. Låt p_1 vara det minsta partiet, som före utdelningen av det sista mandatet inte erhållit några mandat. Låt oss nu föreställa oss situation A, där parti p_1 tar det sista mandatet i valkretsen med en rösts marginal före parti p_3. Med andra ord: om p_3 fått en röst mer så hade p_3 tagit det sista mandatet, och p_1 hade blivit utan. I situation A har vidare parti p_2 tagit alla sina mandat med mer än en rösts marginal; det vill säga, om p_2 fått en röst mindre så hade det inte haft någon inverkan på ordningen i vilken p_2 tagit sina mandat. Antag nu att situation B är densamma som situation A, förutom att p_3 fått en röst mer, samtidigt som p_2 fått en röst mindre. I situation B skulle p_3 ha tagit det sista mandatet istället för p_1, men p_1:s röstandel är densamma i både situation A och situation B. Detta exempel visar att en given röstandel ibland räcker till ett mandat men ibland inte gör det.[3]

Av detta skäl finns det inte någon formel för vilken andel av rösterna som krävs för att ett parti precis ska vara på gränsen till att ta det sista mandatet som sitt första mandat, om antalet partier är 3 eller större. Det vi kan göra matematiskt är att utreda vilka formler som kan berätta dels vilken lägsta röstandel som teoretiskt *kan* ge ett mandat när n partier tävlar om M mandat, dels vilken den lägsta röstandel som *garanterat* ger minst ett mandat när n partier tävlar om M mandat.

Lägsta röstandel som kan räcka till mandat

Först söker vi extremfallet där lägsta möjliga röstandel precis räcker till ett mandat för det parti som vi intresserar oss för (detta parti kommer fortsättningsvis att kallas ”det intressanta partiet”). Med andra ord: vilken är den röstandel som för den mest gynnsamma röstfördelningen bland övriga partier *kan* räcka till ett mandat för det intressanta partiet?

Det är inte så lätt att omedelbart inse vilket röstfördelningsscenario som är mest gynnsamt för det intressanta partiet. Två scenarier förefaller att intuitivt vara de mest uppenbara kandidaterna.

Scenario 1: Helt jämn röstfördelning mellan övriga partier. Det finns n partier och M mandat. Antag vidare, för den algebraiska förenklingens skull, att $k(n-1) = M - 1$, där k är ett positivt heltal ($k \geq 1$). Detta innebär att när ett mandat återstår att fördela har

[3] Ett konkret numeriskt exempel: Låt antalet mandat vara 9, som ska fördelas med uddatalsmetoden där förstadivisorn är 1,4. Ingen spärr tillämpas. Låt röstfördelningen (v_1, v_2, v_3) i situation A vara $(75, 326, 589)$, men i situation B istället $(75, 325, 590)$. I båda situationerna får p_1 röstandelen $75/990$ (dvs. 7,576 %). I situation A räcker detta till ett mandat, men inte i situation B, där p_3 tar det sista mandatet och p_1 blir helt utan mandat.

de övriga partierna lika många mandat, nämligen k mandat vardera. Det intressanta partiet får röstandelen V. De övriga $n - 1$ partierna har således vardera röstandelen $\frac{1-V}{n-1}$. Varje sådant parti får ett jämförelsetal $\frac{1-V}{n-1}/(2k + 1)$, vilket med insättning av $k = \frac{M-1}{n-1}$ ger jämförelsetalet $\frac{1-V}{2(M-1)+n-1}$. Det intressanta partiets jämförelsetal är $\frac{V}{d}$. Om jämförelsetalen sätts lika fås $\frac{1-V}{2(M-1)+n-1} = \frac{V}{d}$. Vi löser ut V och får

$$V = \frac{d}{2(M-1) + n - 1 + d} \tag{6}$$

Med t.ex. $M = 10$, $n = 4$ och $d = 1{,}4$ fås $V = 6{,}250\,\%$.

Scenario 2: Endast ett parti är större än det intressanta partiet. De andra $n - 2$ partierna har identiska röstandelar som är en röst lägre än det intressanta partiet. Vart och ett av de mindre partierna har röstandelen $V - \epsilon$, där ϵ är ett litet tal som i praktiska räknesammanhang kan approximeras med noll. Det största partiet, som naturligtvis tar de $M - 1$ första mandaten, har röstandelen $1 - V - (n-2)(V - \epsilon) \approx 1 - (n-1)V$ (om ϵ approximeras med noll). Det stora partiets jämförelsetal är inför utdelandet av det sista mandatet $\frac{1-(n-1)V}{2M-1}$, medan det intressanta partiets jämförelsetal som vanligt är $\frac{V}{d}$. Om dessa sätts lika kan vi lösa ut V och få

$$V = \frac{d}{2M - 1 + d(n-1)}. \tag{7}$$

Med $M = 10$, $n = 4$ och $d = 1{,}4$ fås $V = 6{,}034\%$.

Vi ser alltså att för fallet $M = 10$, $n = 4$ och $d = 1{,}4$ ger scenario 2 ett lägre värde på V än scenario 1. Vi är här ute efter den *lägsta* röstandel som i det mest gynnsamma fallet kan ge ett mandat. Om något av scenarierna 1 eller 2 är det riktiga så måste det alltså vara scenario 2. Så är också fallet, och det är således (7) som är den sökta formeln. Jag ger inget strikt bevis för att det inte finns något annat scenario som skulle kunna leda till en ännu lägre tröskel. Den intresserade kan studera mer specialiserad litteratur såsom Janson (2012*a*, 2012*b*).

Man kan fråga om (7) alltid ger ett lägre värde än (6) för V, oavsett vilka värden på M, n och d som vi sätter in. Att så skulle vara fallet är liktydigt med att nämnaren i (7) alltid är större än nämnaren i (6). Matematiskt betyder det att

$$2M - 1 + d(n-1) > 2(M-1) + n - 1 + d,$$

vilket efter en smula algebra reduceras till villkoret $d > 1$. Så länge jämkning förekommer ($d > 1$) så ger med andra ord (7) den sökta lägsta röstandel som kan ge mandat. För $d = 1$ sammanfaller (6) och (7) och ger

$$V = \frac{1}{2(M-1) + n}. \tag{8}$$

Den röstandel som garanterat ger mandat

Vi övergår nu till att diskutera vilket röstfördelningsscenario som utgör det mest ogynnsamma för det intressanta partiet. Vilken röstandel måste det intressanta partiet uppnå för att *garanterat* få ett mandat, det vill säga erövra ett mandat trots att röstfördelningen bland de övriga partierna är maximalt ogynnsam? Man kan intuitivt tänka sig flera kandidatscenarier. Det följande är till exempel lätt att börja tänka på.

Scenario 3: Alla partier är större än det intressanta partiet, men $n-2$ sådana partier är bara en röst vardera större än det intressanta partiet. Det intressanta partiet har röstandelen V. Vart och ett av de mindre övriga partierna har nu röstandelen $V+\epsilon$, där ϵ är ett litet tal som i många räknesammanhang kan approximeras med noll. Det största partiet har röstandelen $1-V-(n-2)(V+\epsilon) \approx 1-(n-1)V$ (om ϵ sätts lika med noll). Det största partiet tar de första $M-(n-2)-1$ mandaten. Därefter tar de övriga $n-2$ små partierna varsitt mandat. Sedan återstår bara ett mandat. Det största partiet har (förutsatt att $M \geq n+1$) ett jämförelsetal på $\frac{1-(n-1)V}{2(M-(n-2)-1)+1} = \frac{1-(n-1)V}{2(M-n)+3}$, medan det intressanta partiet som vanligt har jämförelsetalet $\frac{V}{d}$. Vi sätter dem lika och löser ut

$$V = \frac{d}{2M-(2-d)n+3-d} \tag{9}$$

Med $M=10$, $n=4$ och $d=1{,}4$ fås $V=7{,}292\%$.

En annan kandidat kunde vara följande scenario.

Scenario 4: Det intressanta partiet har V i röstandel, medan alla andra har $V+\epsilon$, där ϵ återigen är ett litet tal som i praktiska räknesammanhang kan approximeras med noll. Om man tänker efter kan situationen delas upp i tre olika underscenarier beroende på antalet partier i förhållande till antalet mandat.

Scenario 4a (mindre realistiskt): Antalet partier är strikt större än antalet mandat (med andra ord $n \geq M+1$). Nu kan det intressanta partiet inte få något mandat alls, så detta kan inte utgöra det sökta extremfallet.

Scenario 4b (också mindre realistiskt): Antalet mandat är lika med antalet partier ($M=n$). Nu får alla partier ett mandat var, varav det intressanta partiet får det sista mandatet. Detta scenario utgör dock inte något gränsfall mellan att få eller inte få ett mandat för det intressanta partiet. Ty om det intressanta partiet ökar sin röstandel något så fortsätter det förstås att få mandat, och om det intressanta partiets röstandel minskar något fortsätter partiet också att ta mandat. Partiets röstandel kan i själva verket minskas ganska ordentligt, i enlighet med scenario 1, innan vi når gränsen mellan att ta och inte ta mandat.

Scenario 4c (realistiskt): Mandaten är fler än partierna ($M>n$). Detta blir ett intressant gränsfall endast om skillnaden mellan V och $V+\epsilon$ leder till skillnad i antal tilldelade mandat. Och eftersom vi för det intressanta partiet endast intresserar oss för ett gränsfall avseende partiets *första* mandat, kan detta helt enkelt inte hända för $M>n$. Enda chansen att få till en intressant situation är att låta något parti få en större andel av rösterna än $V+\epsilon$. Men då har vi förflyttat oss till scenario 3.

Sammantaget ser vi alltså att scenario 4, uppdelat i sina underscenarier 4a–4c, inte ger oss något nytt gränsfall mellan att ta eller inte ta mandat, och att scenario 4 därför inte kan ge vad vi söker efter. Men det finns ytterligare ett scenario att undersöka. I scenario 3 var det intressanta partiet marginellt mindre än ett antal andra partier som alla var lika stora. Men man kan också tänka sig en situation där det intressanta partiet har en ännu mer utstuderad otur, nämligen genom att i en rad mandatfördelningssituationer precis förlora mandat mot det ena partiet efter det andra, utan att alla dessa andra partier är jämnstora. Detta ger scenario 5.

Scenario 5: Det intressanta partiet har V i röstandel, medan de $n-1$ andra partierna har röstandelar som gör att de precis kniper de $n-1$ sista mandaten framför näsan på det intressanta partiet. Det intressanta partiet ger jag här index n, dvs. det är det sista partiet i uppräkningen av samtliga partier. Dock kommer jag fortfarande att använda beteckningen V för det intressanta partiets röstandel, istället för (det möjligen övertydliga) V_n. De övriga partierna har alltså röstandelarna $V_1, \dots, V_{n-1}$. Summan av de icke-intressanta partiernas röstandelar är förstås

$$\sum_{i=1}^{n-1} V_i = 1 - V. \tag{10}$$

När $n-1$ mandat återstår att dela ut, så är antalet utdelade mandat $M-n+1$. Med andra ord, de icke-intressanta partierna har i detta läge tagit

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i = M - n + 1 \tag{11}$$

mandat, där m_i är antalet erövrade mandat för parti nr i. I detta läge har alla partier enligt vårt antagande samma jämförelsetal, men det intressanta partiet har otur och går precis miste om vart och ett av de sista $n-1$ mandaten i tävlan mot de andra partierna. I så fall gäller att det intressanta partiet har jämförelsetalet $J_n = \frac{V}{d}$, och de andra partiernas jämförelsetal är lika stora som det intressanta partiets, det vill säga

$$J_i = J_n = \frac{V}{d} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \tag{12}$$

Allmänt gäller för jämkade uddatalsmetoden enligt (4) att

$$V_i = J_i(2m_i + 1), \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

vilket efter insättning av (12) ger

$$V_i = \frac{V}{d}(2m_i + 1), \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Summering över index $i = 1, 2, \dots, n-1$ i bägge led ger

$$\sum_{i=1}^{n-1} V_i = \frac{V}{d} \sum_{i=1}^{n-1} (2m_i + 1).$$

Insättning av (10) i vänsterledet och utnyttjande av (11) i högerledet ger

$$\begin{aligned} 1 - V &= \frac{V}{d}\left(2\sum_{i=1}^{n-1} m_i + \sum_{i=1}^{n-1} 1\right) \\ &= \frac{V}{d}\left(2(M-n+1) + n - 1\right) \\ &= \frac{V}{d}(2M - n + 1), \end{aligned}$$

ur vilket vi sedan kan lösa V och få

$$V = \frac{d}{2M - n + 1 + d}. \tag{13}$$

Enligt scenario 5 och med $M = 10$ och $n = 4$ fås röstandelen 7,609 % för det intressanta partiet. Detta kan jämföras med andelen 7,292 % enligt scenario 3. Av dessa två måste således scenario 5 vara det riktiga. Vi söker ju här ett scenario som i det mest *ogynnsamma* fallet precis räcker till för att garantera ett mandat. Det är förstås mer ogynnsamt att behöva erövra en större andel av rösterna för att vara säker på att få ett mandat. Scenario 5 är verkligen det sökta extremfallet, och det är således ekvation (13) som utgör den sökta formeln.

Man kan fråga sig om ekvation (13) alltid ger ett högre värde på V än ekvation (9). Att så skulle vara fallet vore liktydigt med att nämnaren i (9) skulle vara större än nämnaren i (13), det vill säga

$$2M - (2 - d)n + 3 - d > 2M - n + 1 + d,$$

vilket efter litet algebra återigen reduceras till villkoret $d > 1$. Om ingen jämkning används ($d = 1$) reduceras således både (9) och (13) till

$$V = \frac{1}{2(M + 1) - n}. \tag{14}$$

Man kan notera likheten mellan ekvationerna (8) och (14) – endast plus- och minustecken har ändrats.

Men vilken är den *typiska* spärren?

Nu har vi således redovisat de två formler som tillåter oss att räkna ut dels vilken röstandel som i det allra mest gynnsamma fallet *kan* räcka till ett mandat, dels vilken röstandel som trots maximalt ogynnsam röstfördelning *garanterar* ett mandat. De två formlerna är (7) respektive (13). (Vi noterar som väntat att såväl (7) som (13) reduceras till (5) för $n = 2$.) Om vi inför beteckningen V_{min} för den mindre av dessa två röstandelar och V_{max} för den större, så ges alltså V_{min} av ekvation (7) och V_{max} av ekvation (13).[4]

Detta är ju gott och väl, men kanske vore det ibland önskvärt att kunna peka på *en* spärr för varje valkrets med M mandat (givet divisorn d och antalet partier n), en röstandel om vilken man kunde säga ”vid denna röstandel är sannolikheten 50 % att få ett mandat”. Låt oss kalla denna röstandel $V_{50\%}$. Det är ju klart att $V_{50\%}$ ligger någonstans mellan V_{min} och V_{max} (för givna M, d och n). Om man bara vill ha ett grovt mått kunde man ju ta

$$V_{50\%} \approx \frac{V_{\text{min}} + V_{\text{max}}}{2}. \tag{15}$$

Men det är ju inte säkert att $V_{50\%}$ ligger mitt emellan V_{min} och V_{max}, så vi vet inte hur

[4] Den som studerar Janson (2012*a*, s. 94ff, särskilt sats 8.24 på s. 97ff), och i än högre grad Janson (2012*b*), finner där i princip samma resonemang kring V_{max} och V_{min} som jag fört, men matematiskt striktare genomförda. Tyvärr använder jag andra beteckningar än Janson, vilket beror på att jag i stort sett hade skrivit ned alla mina resonemang innan jag upptäckte att Janson (2012*a*, 2012*b*) alls fanns.

rättvisande formel (15) är. En annan möjlighet vore att ta gränsen som ekvation (5) ger för fallet $n = 2$ som approximation. Värdet som ges av (5) ligger nämligen alltid någonstans mellan V_{min} och V_{max}. Vi skulle alltså anta att

$$V_{50\%} \approx \frac{d}{2M - 1 + d}.$$

Janson (2012*a*, s. 97; 2012*b*, s. 6f) rekommenderar denna ekvation som approximation, och ger en algebraisk motivering utifrån antaganden om avrundningsfel. Man skulle också kunna använda simuleringsmetoder för att ta reda på hur bra denna approximation är. Jag hoppas kunna återkomma i det ämnet i en senare publikation.

Naturliga spärrar snart överspelade?

Naturliga spärrar har idag (2014) ingen betydelse i riksdagsval och landstingsval i Sverige. I kommunalvalen har de betydelse, eftersom det inte finns några spärrar och eftersom valkretsarna är olika stora. Den naturliga spärren skiljer sig från valkrets till valkrets. Ibland kan den kanske förefalla överraskande låg. I 28 icke valkretsindelade kommuner har fullmäktige 49 ledamöter (Valmyndigheten, 2010*a*), och här räcker det med en röstandel på knappt 1,5 % för att få representation. Två exempel från kommunalvalen 2010 kan ges. I Mörbylånga fick Ölandspartiet ett mandat efter att ha erövrat 1,44 % av rösterna. KD fick ett mandat i Kävlinge med 1,48 % av rösterna.

I valkretsindelade kommuner kan den naturliga spärren tvärtom vara hög. Stockholms kommun har 101 mandat i fullmäktige och är indelad i hela sex valkretsar, som vardera har mellan 15 och 20 mandat (vid 2010 års val). I en valkrets på 15 mandat ligger den naturliga spärren på ca 4,5 %, i en valkrets på 20 mandat blir den naturliga spärren ca 3,4 %. Vid valet 2010 fick C 3,98 % av rösterna, vilket räckte till tre mandat, medan de 3,49 % som KD erövrade endast gav ett mandat. Båda partiernas stöd låg nära de naturliga spärrarna i valkretsarna. Något liknande hände vid valet 2006, men då med ombytta roller: C fick 3,14 % och ett mandat, medan KD fick 3,91 % och tre mandat. Man kan notera att C vid detta val tog sitt mandat i den mandatmässigt största valkretsen (Södermalm–Enskede, 21 mandat) med 3,24 % av rösterna, men hade högre röstandelar i två andra valkretsar där man inte erövrade något mandat, med 3,98 % som bästa resultat (Bromma–Kungsholmen, 16 mandat).

I kommunalvalen ska enligt den senaste utredningens förslag (SOU 2012:94) en spärr på 2 % i icke valkretsindelade kommuner och på 3 % i valkretsindelade kommuner införas från och med valet 2018, och dessutom utjämningsmandat i valkretsindelade kommuner på samma sätt som vi redan idag har i riksdagen och landstingen.[5] Samtidigt föreslår man en ändring av jämkningen (första divisorn) från 1,4 till 1,2. Skulle diskussioner om naturliga spärrar bli helt irrelevanta i det svenska valsystemet om förslagen genomfördes?

I valkretsindelade kommuner blir diskussioner om naturliga spärrar självfallet irrelevanta på grund av kombinationen av spärr på 3 % och användningen av utjämnings-

[5] Varför föreslår man olika spärrnivå beroende på om kommunen är indelad i valkretsar eller ej? Utredningen anför följande enda argument: ”När det gäller nivån på spärren har vi strävat efter att ligga nära ett genomsnitt av den faktiska spärr som finns i dag. Med dessa utgångspunkter har vi kommit fram till att spärren bör vara 3 procent i valkretsindelade kommuner och 2 procent i icke valkretsindelade kommuner” (SOU 2012:94, s. 112f). För egen del finner jag detta argument otillfredsställande.

mandat. Om förslaget blir verklighet gör man först en total mandatfördelning som om hela kommunen vore en valkrets, och använder därvid spärren på 3 %. Därefter sker fördelning av fasta mandat i respektive valkrets (men endast för partier som fått minst 3 % i hela kommunen). Sedan beräknar man hur många mandat som saknas för respektive parti för att de ska få det antal mandat som totalfördelningen angivit, och utjämningsmandaten fördelas efter dessa beräknade behov.[6] Den enda möjligheten för naturliga spärrar att göra någon skillnad vore om det totala antalet mandat är så litet att inte ens 3 % av rösterna räcker till ett mandat i totalfördelningen. Med förstadivisorn 1,2 inträffar detta vid ungefär $M = 23$ och mindre. Så små fullmäktige är numera tillåtna (se nästa stycke), men inte i valkretsindelade kommuner. Vid indelning i kommunvalkretsar måste nämligen varje valkrets svara mot minst 15 ledamöter, enligt Vallagen (4 kap, 12 §). Det betyder att valkretsindelade kommuner måste ha minst 31 ledamöter i fullmäktige. Rent faktiskt är det vid 2014 års val ingen valkretsindelad kommun som har färre än 45 ledamöter i fullmäktige (Valmyndigheten, 2014).

I icke valkretsindelade kommuner frågar vi oss om det vore möjligt att klara 2 %-spärren och ändå inte få något mandat på grund av den naturliga spärren. I kommunallagen som gällde vid 2010 års val stadgades att 31 är minimiantalet ledamöter av ett svenskt kommunfullmäktige. Vid kommunalvalen 2010 hade 51 kommuner 31 ledamöter (Valmyndigheten, 2010*a*). Från den 1 februari 2014 har dock lagen ändrats, så att minimiantalet är 21 för kommuner med 8 000 röstberättigade eller färre. Vid 2014 års val har tre kommuner valt att ha 21 ledamöter i fullmäktige (Ydre, Arjeplog, Sorsele). Ytterligare nio kommuner har valt att ha 25, 27 eller 29 ledamöter, dvs. lägre än den tidigare minimibestämmelsen 31 (Valmyndigheten, 2014). För $M = 21$ är man inte garanterad representation (för $n = 8$, $d = 1{,}2$) förrän vid röstandelen 3,31 % enligt ekvation (13). Den typiska spärren enligt (5) är 2,84 %. Om bestämmelserna om en 2 %-spärr i icke valkretsindelade kommuner genomförs till valet 2018 ser det alltså ut att bli fullt möjligt att nå över 2 % av rösterna men ändå inte få någon plats i fullmäktige i några av de minsta kommunerna.

Vår slutsats måste bli att naturliga spärrar kan fortsätta att spela en viss roll i det svenska valsystemet, om förslagen enligt SOU 2012:94 genomförs, nämligen i små, icke valkretsindelade kommuner. I de allra flesta kommunerna kommer dock naturliga spärrar inte att spela någon roll alls.

Referenser

Dir 2011:97. *Översyn av valsystemet*. Kommittédirektiv. Beslut vid regeringssammanträde 27 oktober 2011. <www.regeringen.se/content/1/c6/17/90/22/69d2c85b.pdf>.

Hirdman, Yvonne; Lundberg, Urban & Björkman, Jenny (2012). *Sveriges historia 1920–1965*. Stockholm: Norstedts.

Janson, Svante (2012*a*). *Proportionella valmetoder*. Opublicerat manuskript, <www2.math.uu.se/~svante/papers/sjV6.pdf>.

[6] Om man inte låter en tillräckligt stor andel av mandaten att vara utjämningsmandat kan det hända att vissa partier får fler fasta mandat än de borde få totalt, varvid utjämningsmandaten inte kommer att räcka till för att i kombination med de fasta mandaten åstadkomma den önskade totalfördelningen. Detta inträffade till exempel vid riksdagsvalet 2010, då M fick 107 och S fick 112 mandat redan bland de 310 fasta mandaten, medan en totalfördelning av alla 349 mandaten visade att dessa partier borde ha fått 106 respektive 109 mandat (Valmyndigheten, 2010*b*: bilaga 4, s. 7).

Janson, Svante (2012*b*). *Den naturliga spärren med jämkade uddatalsmetoden*. Rapport till 2011 års vallagskommitté, daterad 6 februari 2012. Tillgänglig på <www2.math.uu.se/~svante/papers/sjV5.pdf>.

Linusson, Svante (2008). Uddatalsmetoden och valsystem. I: Ola Helenius & Karin Wallby (red.), *Människor och matematik – läsebok för nyfikna*, Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, 167–182.

SOU 1971:4. *Kommunala val. Betänkande avgivet av Kommunalvalskommittén*. Stockholm: Civildepartementet.

SOU 2004:111. *Ny vallag. Betänkande av 2003 års vallagskommitté*. Stockholm: Regeringskansliet.

SOU 2008:125. *En reformerad grundlag. Del 1. Betänkande av Grundlagsutredningen*. Stockholm: Regeringskansliet. <www.regeringen.se/content/1/c6/11/77/44/3623172e.pdf>.

SOU 2012:30. *Vital kommunal demokrati. Betänkande av Kommittén för förstärkning av den kommunala demokratins funktionssätt.* Stockholm: Regeringskansliet.

SOU 2012:94. *Proportionalitet i val och förhandsanmälan av partier och kandidater*. Stockholm: Regeringskansliet. <www.regeringen.se/content/1/c6/20/68/60/b37a603f.pdf>.

Tottmar, Mia (2013). Väljarna vill ha skifte i Stadshuset, *Dagens Nyheter* 2013-09-19, Stockholmsdelen, s. 4–5. <www.dn.se/sthlm/valjarna-vill-ha-skifte-i-stadshuset/>.

Valmyndigheten (2010*a*). Filen `mandatfordelning_per_valkrets_K.xls` med bearbetningsbar statistik över mandatfördelningen per valkrets vid kommunalvalen 2010, tillgänglig på <www.val.se/val/val2010/statistik/index.html>.

Valmyndigheten (2010*b*). Fördelning av mandat i riksdagen och fastställelse av vilka kandidater som har valts till ledamöter och ersättare, Beslut 2010-09-23, tillgängligt på <www.val.se/val/val2010/slutresultat/protokoll/protokoll_00R.pdf>.

Valmyndigheten (2014). Filen `Valkretsmandat kommun 2014.xls` med bearbetningsbar statistik över mandatfördelningen per valkrets vid kommunalvalen 2014, tillgänglig på <www.val.se/val/val2014/statistik/index.html>.